ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ THU

VỀ CÁC SỐ t-CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ THU

VỀ CÁC SỐ t-CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, người thân đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Lê Thị Thu

Danh sách kí hiệu

B_n	Số cân bằng thứ n
b_n	Số đối cân bằng thứ n
C_n	Số Lucas-cân bằng thứ n
c_n	Số Lucas-đối cân bằng thứ n
B_n^t	Số t-cân bằng thứ n
b_n^t	Số t-đối cân bằng thứ n
C_n^t	Số Lucas t-cân bằng thứ n
c_n^t	Số Lucas t-đối cân bằng thứ n
$B_n(x)$	Đa thức cân bằng thứ n
$B_n^{(r)}(x)$	Đạo hàm cấp r của $B_n(x)$
α	Số thực α có giá trị $\alpha = 3t + \sqrt{9t^2 - 1}$
β	Số thực β có giá trị $\beta = 3t - \sqrt{9t^2 - 1}$
(a, b)	Ước chung lớn nhất của a và b
$\binom{n}{k}$	Tổ hợp chập k của n

Mở đầu

Một số tự nhiên n được gọi là *số cân bằng* với hệ số cân bằng r nếu nó là nghiệm của phương trình Diophant

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r).$$

Hệ số cân bằng r còn được gọi là *số đối cân bằng*. Khái niệm về số cân bằng được tìm ra và nghiên cứu đầu tiên bởi Behera và Panda. Sau đó, rất nhiều tính chất đẹp của số cân bằng được tìm thấy (xem [2]). Đặc biệt nếu kí hiệu B_n và b_n lần lượt là số cân bằng và số đối cân bằng thứ n thì ta có công thức truy hồi

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \text{ và } b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2,$$

với $B_1 = 1, B_2 = 6, b_1 = 0$ và $b_2 = 2$. Ngoài ra, các số $8B_n^2 + 1$ và $8b_n^2 + 8b_n + 1$ là các số chính phương. Hơn nữa, các số nguyên

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1} \text{ và } c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

đều thỏa mãn phương trình sai phân $x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$. Các số này lần lượt được gọi là *số Lucas-cân bằng* và *số Lucas-đối cân bằng* thứ n.

Tổng quát hóa các số trên, Özkoç [3] đã giới thiệu và nghiên cứu các tính chất của các *số t-cân bằng* B_n^t, *số t-đối cân bằng* b_n^t, *số Lucas*

t-cân bằng C_n^t và *số Lucas t-đối cân bằng* c_n^t, với t là một số nguyên không âm (xem Định nghĩa 1.1.1, để thuận tiện ta sẽ gọi chung là các số t-cân bằng). Sau đó nhiều tính chất thú vị của các số này được tìm ra bởi nhiều nhà toán học. Đặc biệt, tiếp tục mở rộng khái niệm về các số t-cân bằng bằng cách xem t như là một biến số thực, Ray [5] đã nghiên cứu về *các đa thức cân bằng*.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày lại một cách hệ thống về khái niệm và một số tính chất của các số t-cân bằng, cũng như một số vấn đề liên quan dựa theo các bài báo của Ray [5] và của Özkoç và Tekcan [4].

Cấu trúc của luận văn

Luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1. Khái niệm về số t-cân bằng. Mục đích của Chương này là giới thiệu lại khái niệm về các số t-cân bằng của Ökoç và một số tính chất cơ bản, cũng như một số tính chất số học của các số t-cân bằng.

• Chương 2. Một số vấn đề liên quan đến số t-cân bằng. Mục đích của Chương này là trình bày lại một số kết quả về tổng của các số t-cân bằng, đa thức cân bằng và đạo hàm của các đa thức này.

Chương 1

Khái niệm về số t-cân bằng

Chương này dự kiến giới thiệu về khái niệm các số t-cân bằng, một số đẳng thức và một số tính chất số học liên quan đến các số t-cân bằng.

1.1 Khái niệm về số t-cân bằng

Năm 1999, trong bài báo "On the Square Roots of Triangular Numbers" đăng trên tạp chí The Fibonacci Quarterly, hai tác giả Behera và Panda đã giới thiệu khái niệm về các *số cân bằng* và các *số đối cân bằng*. Sau đó, nhiều nhà toán học khác đã nghiên cứu tiếp và khái niệm về các *số Lucas-cân bằng* và các *số Lucas-đối cân bằng* ra đời. Khái niệm về các số này và một số tính chất của chúng đã được trình bày trong các luận văn [1, 2]. Ở đây, để nêu khái niệm về các số t-cân bằng, chúng tôi chỉ nêu lại khái niệm và công thức truy hồi đối với các số cân bằng.

Một số nguyên dương n được gọi là một số cân bằng nếu tồn tại một số nguyên không âm r sao cho

$$1 + 2 + \cdots + n = n + (n+1) + \cdots + (n+r).$$

Số nguyên dương r như vậy được gọi là số đối cân bằng. Ví dụ như 1, 6, 35, 204, 1189 và 6930 là sáu số cân bằng đầu tiên. Tương ứng, sáu số đối cân bằng đầu tiên là 0, 2, 14, 84, 492 và 2870.

Kí hiệu B_n là số cân bằng thứ n và b_n là số đối cân bằng thứ n. Khi đó ta có

$$B_1 = 1, B_2 = 6, B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, \text{ với } n \geq 2,$$

và

$$b_1 = 0, b_2 = 2, b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, \text{ với } n \geq 2.$$

Hơn nữa, số nguyên dương B_n là một số cân bằng khi và chỉ khi $8B_n^2 + 1$ là số chính phương. Tương tự, số nguyên không âm b_n là số đối cân bằng khi và chỉ khi $8b_n^2 + 8b_n + 1$ là số chính phương. Đặt

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1} \text{ và } c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}.$$

Các số C_n và c_n lần lượt được gọi là *số Lucas-cân bằng* thứ n và *số Lucas-đối cân bằng* thứ n. Các số này còn được xác định bởi

$$C_1 = 3, C_2 = 17, C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}, n \geq 2,$$

và

$$c_1 = 1, c_2 = 7, c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, n \geq 2.$$

Tổng quát hóa các khái niệm này, năm 2015, Özkoç [3] đã giới thiệu khái niệm về các *số t-cân bằng*, các *số t-đối cân bằng*, các *số Lucas t-cân bằng* và các *số Lucas t-đối cân bằng*. Cụ thể, với số nguyên dương t cố định, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.1. Ta định nghĩa

(i) các *số t-cân bằng*, kí hiệu $B_n^t, n = 0, 1, 2, ...$, là các số được xác định bởi

$$B_0^t = 0, B_1^t = 1 \text{ và } B_{n+1}^t = 6tB_n^t - B_{n-1}^t \text{ với } n \geq 1;$$

(ii) các *số t-đối cân bằng*, kí hiệu $b_n^t, n = 1, 2, ...$, là các số được xác định bởi

$$b_1^t = 0, b_2^t = 2 \text{ và } b_{n+1}^t = 6tb_n^t - b_{n-1}^t + 2 \text{ với } n \geq 2;$$

(iii) các *số Lucas t-cân bằng*, kí hiệu $C_n^t, n = 0, 1, 2, ...$, là các số được xác định bởi

$$C_0^t = 1, C_1^t = 3 \text{ và } C_{n+1}^t = 6tC_n^t - C_{n-1}^t \text{ với } n \geq 1;$$

(iv) các *số Lucas t-đối cân bằng*, kí hiệu $c_n^t, n = 1, 2, ...$, là các số được xác định bởi

$$c_1^t = 1, c_2^t = 7 \text{ và } c_{n+1}^t = 6tc_n^t - c_{n-1}^t \text{ với } n \geq 2.$$

Áp dụng lý thuyết phương trình sai phân, ta xét phương trình đặc trưng

$$x^2 - 6tx + 1 = 0.$$